

# Índice

<b>Introducción</b> .....	9
Tema 0	
<b>Números reales y complejos</b> .....	11
Tema 1	
<b>Funciones de varias variables</b> .....	19
1.1. Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ .....	19
1.2. Funciones escalares y vectoriales de varias variables .....	27
1.3. Límite de una función en un punto .....	36
1.4. Continuidad .....	41
1.5. Problemas resueltos .....	43
1.6. Problemas propuestos .....	47
Tema 2	
<b>Cálculo diferencial en <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	51
2.1. Derivadas parciales. Vector gradiente .....	51
2.2. Composición de funciones. Regla de la cadena .....	58
2.3. Función inversa e implícita .....	60
2.4. Polinomio de Taylor .....	64
2.5. Optimización .....	66
2.6. Problemas resueltos .....	74
2.7. Problemas propuestos .....	78
Tema 3	
<b>Cálculo integral en <math>\mathbb{R}^2</math> y <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	83
3.1. Integral doble .....	83
3.2. Integral triple .....	93
3.3. Propiedades de la integración múltiple .....	101
3.4. Problemas resueltos .....	102
3.5. Problemas propuestos .....	104
Tema 4	
<b>Integrales curvilíneas y de superficie</b> .....	111
4.1. Integración de funciones escalares sobre curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ .....	111
4.2. Circulación de funciones vectoriales sobre curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ .....	114
4.3. Función potencial .....	117
4.4. Flujo de campos vectoriales a través de curvas cerradas en $\mathbb{R}^2$ .....	123
4.5. Integración de funciones escalares sobre superficies en $\mathbb{R}^3$ .....	125
4.6. Flujo de funciones vectoriales a través de superficies en $\mathbb{R}^3$ .....	128

4.7. Teoremas del cálculo vectorial .....	131
4.8. Problemas resueltos .....	138
4.9. Problemas propuestos .....	144
<b>Tema 5</b>	
<b>Ecuaciones y sistemas diferenciales</b> .....	149
5.1. Definiciones básicas .....	150
5.2. Planteamientos sencillos .....	154
5.3. EDO de primer orden y primer grado .....	158
5.4. Haz de curvas planas. Trayectorias ortogonales .....	170
5.5. EDO lineal de orden $n \geq 2$ .....	172
5.6. Sistemas de EDO lineales de primer orden .....	183
5.7. Problemas resueltos .....	198
5.8. Problemas propuestos .....	202
<b>Soluciones de los problemas propuestos</b> .....	207
<b>Bibliografía</b> .....	221

# Introducción

En nuestra experiencia como profesores de Cálculo para estudiantes de primer curso de grado de Ingeniería nos hemos encontrado con textos de dos tipos: por una parte, textos muy rigurosos y completos de difícil comprensión para el alumnado y, por otra, textos de sencilla comprensión, pero que no abordan los conceptos más interesantes y prácticos del Cálculo. En este texto hemos optado por seguir un camino intermedio, intentado llegar a los resultados más importantes del cálculo en varias variables por caminos muy sencillos, evitando meternos en los más ásperos métodos del análisis. Así, por ejemplo, en el tema 1 introducimos el concepto de funciones escalares y vectoriales, límites y continuidad, apoyándonos todo lo posible en su representación gráfica. En el tema 2 introducimos el polinomio de Taylor de grado 2 para funciones de varias variables de forma intuitiva, generalizando el polinomio de Taylor de grado uno (plano tangente). La integración múltiple y la integración sobre curvas y superficies es introducida en los temas 3 y 4 como técnica de cálculo de longitudes, áreas y volúmenes mediante una «suma continua» de elementos de línea, superficie o volumen infinitesimales.

Además, el diseño de los nuevos grados de ingenierías exige un aprendizaje del cálculo diferencial e integral en varias variables y las ecuaciones diferenciales en asignaturas de pocos créditos, e incluso en primer curso de grado. Esta tarea requiere un esfuerzo de comprensión de la materia por parte del docente y de asimilación por parte del alumnado. Este libro pretende ser un curso introductorio y básico de cálculo diferencial e integral en varias variables y de ecuaciones diferenciales para estudiantes de primer curso de grados de Ingeniería. Pretendemos cubrir todos los aspectos básicos del cálculo en varias variables y de las ecuaciones diferenciales ordinarias de una forma sencilla, sin entrar en las profundidades que requiere un estudiante de matemáticas, pero sin descuidar por ello el rigor y la claridad en la exposición de los conceptos. Para ello, seguimos un discurso descriptivo de la asignatura, haciendo hincapié en la clara exposición de los conceptos, ayudada de numerosas gráficas y adecuados ejemplos. No seguiremos el más riguroso esquema teorema-demostración más apropiado para otro tipo de estudiantes, aunque sí haremos algunas demostraciones sencillas y trataremos de argumentar o justificar al menos con estrategias heurísticas los resultados que presentemos. El objetivo principal de este libro es que el alumnado aprenda las técnicas del cálculo diferencial e integral en varias variables y de las ecuaciones diferenciales ordinarias de una forma absolutamente práctica que le permita abordar los problemas matemáticos que le puedan surgir a lo largo de sus estudios, tanto en asignaturas matemáticas como no matemáticas.

Para ello, en un primer tema introducimos (o recordamos) unos conceptos elementales sobre números complejos que se utilizarán posteriormente en el último tema. Seguidamente introducimos el concepto de función escalar y vectorial de varias variables, acompañado de los

conceptos de límite y continuidad. En el tema 2 abordamos la diferenciabilidad desde un punto de vista meramente computacional, que utilizamos para definir el polinomio de Taylor de una función escalar de varias variables y las técnicas de optimización habituales para funciones escalares de varias variables. En el tema 3 introducimos los conceptos de integral múltiple, resaltando el uso de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas. En el tema 4 abordamos la integración sobre curvas y superficies de funciones escalares y vectoriales, para terminar con los teoremas más importantes del cálculo vectorial. Finalmente, en el tema 5 introducimos los conceptos fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias y los métodos de resolución más elementales.

Cada tema contiene una sección de problemas resueltos y otra sección de problemas propuestos en las que intentamos abordar todos los tipos de problemas que se pueden plantear sobre la teoría estudiada en el tema, muchos de ellos con un carácter claramente aplicado. En la parte final del libro incluimos un apéndice con las soluciones de los problemas propuestos.