Olinpiada matematikoa

Daniel Lasaosa Medarde

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

LIBURU AKADEMIKOAK EUSKARAZ

Gure unibertsitatean euskararen presentzia indartzea da bilduma honen helburua, eta material akademiko baliagarriak eta kalitate onekoak jartzea gure ikasleen eskura.

Izenburua: Olinpiada matematikoa
Egilea: Daniel Lasaosa Medarde
Itzulpena: Hizkuntza Plangintzarako Atala (NUP)
Argitaratzailea: Nafarroako Unibertsitate Publikoa
© Nafarroako Unibertsitate Publikoa
© Daniel Lasaosa Medarde

Azalaren diseinua: Kö. Comunicación Gráfica
Fotokonposizioa: Pretexto
Inprimategia: ????

ISBN: 978-84-9769-000-0
Lege gordailua: NA 0000-2022

Obra honen edozein kopia, banaketa, komunikazio publiko edo aldaketa egiteko, ezinbestekoa da bere titularraren baimena, salbu eta legeak espresuki besterik esaten ez badu. Jarri harremanetan CEDROrekin (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) baldin eta obra honen zatiren bat fotokopiatu edo eskaneatu behar baduzu edo kopia digitalen bat egin behar baduzu.

Banaketa: Komunikazio Atala (Argitalpenak)
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Arrosadiko campusa
31006 Iruñea
publicaciones@unavarra.es

Aurkibidea

Sarrera 7

I. Konbinatoria 11

I.1. DIRICHLETEN PRINTZIPIOA EDO USATEGIAREN PRINTZIPIOA 11
I.2. PERMUTAZIOAK ETA KONBINAZIOAK 14
I.3. INDUKZIO PRINTZIPIOA 21
I.4. KONBINATORIAKO PROBLEMAK – HASIERAKO MAILA 27
I.5. KONBINATORIAKO PROBLEMAK – ERDIKO MAILA 29

II. Zenbakien teoria 31

II.1. ZATIGARRITASUNA ETA ZENBAKI LEHENAK 31
II.2. ZATITZAILE KOMUNETAKO HANDIENA 38
II.3. MODULUAK ETA HONDARRAK 42
II.4. SEGIDA MODULAR-PERIODIKOAK ETA EULERRREN ETA FERMATEN TEOREMA 45
II.5. ZENBAKIEN TEORIAKO PROBLEMAK – HASIERAKO MAILA 51
II.6. ZENBAKIEN TEORIAKO PROBLEMAK – ERDIKO MAILA 52

III. Aljebra 53

III.1. PROGRESIO ARITMETIKOAK ETA GEOMETRIKOAK 53
III.2. BESTE ALDAGAI BATZUEN DEFINIZIOA 58
III.3. POLINOMIOAK ETA CARDANO-VIETA ERLAZIOAK KOEFIZIENTEEN ETA ERROEN ARTEAN 61
III.4. DESBERDINTASUNAK (I) 65
III.5. ALJEBRAKO PROBLEMAK – HASIERAKO MAILA 70
III.6. ALJEBRAKO PROBLEMAK – ERDIKO MAILA 72

IV. Simetrien erabilera batzuk eta hausnarketak, erdikaria erreferentziatzat hartuz 75

V. Zenbait estrategia tauletako problemak ebazteko 93

VI. Zenbait estrategia problema dinamikoak ebazteko 111

Sarrera

XIX. mendearen bukaeran eta XX.aren hasieran sortu ziren eta hedatu ziren Europako erdialdean eta ekialdean, batez ere, matematikako lehiaketak, gaur den egunean ezagutzen ditugun bezala. Haien helburua beti izan da irakaskuntza matematiko arautik harago doazen problemak lehia onean ebaztea. Maila desberdinetako lehia matematikoak izan arren, Nazioarteko Olinpiada Matematikoa (IMO) da garrantzitsuena, eta Bigarren Hezkuntzako ikasleek parte hartzeko egiten da.

1959. urtean egin zen IMOaren lehenbiziko edizioa. Europako ekialdeko eta erdialdeko herrialdeetako ikasleek ia bakar-bakarrik hartu zuten parte aurreneko urteetan, mende erdi bat lehenagotik bazelakoz herrialde haietan lehiaketa matematikoak egiteko tradizioa. Beste herrialde batzuetakoak ere emeki hasi baziren ere parte hartzen, Europako ekialdeko herrialdeetako ikasleek menderatu zuten erabat eta ezbairik gabe IMOa aurreneko 25 edizioetan, Hungariakoek, Errumaniakoek eta Sobietar Batasunekoek batez ere. 30 urte baino gehixeago badira Txina eta Estatu Batuak ere hasi zirela lehiaketa honetako herrialde indartsuenen artekoak izaten, eta azkeneko 15 urteotan ikusi dugu nola hasi diren izaten Asiako hego-ekialdeko herrialde batzuk (Vietnam, Singapur, Hego Korea) eta beste alde batzuetako herrialdeak (Iran), tradizioz indartsuenak izan direnen nagusitasunari desafio egiten urtetik urtera.

Gure herrialdean 1963-1964 ikasturtetik aurrera egiten da Espainiako Olinpiada Matematikoa (EOM). Aipamen berezia merezi du, horri dagokionez, José Javier Etayo Miqueo (1926-2012) Real Sociedad Matemática Española elkartearen kolaboratzaile, presidente eta ohorezko bazkide izan zenak. Aktiboki inplikatu zen Olinpiada Matematikoa abiarazten, eta bere kudeaketari esker gainditu ahal izan ziren olinpiada galtzera eraman behar zuten arazoak eta eutsi egin zitzaion gaur den egunera arte irauteko. Espainiak 1983tik hona hartzen du parte Nazioarteko Olinpiada Matematikoan, eta Madrilen 2008an egin zen IMOa antolatu zuen gainera.

Antzeko beste lehiaketa akademiko batzuk sortu ziren arren Nazioarteko Olinpiada Matematikoaren irudira, IMOan edo bere aurreko faseetako batean parte hartu dutenek badute harro egoteko modua, denetan zaharrena den lehiaketan parte hartu dutelakoz.

Olinpiada matematikoetan parte hartzeko Matematikan nolabaiteko jakintza edukitzea beharrezkoa, edo oso desiragarria behintzat, baldin bada ere, are gehiago da asmamena eta sormena edukitzea. Problemek nola ebazpenek, horrenbestez, balio estetikoa izan dezakete, baina edertasuna, ordea, ez zaie sortzen jakintza handiagoa erakustea edo teorema aurreratuagoak erabiltzea behar dutelakoz, baizik eta, hain zuzen ere, kontrakoarengatik: deskribatzen errazak baina analizatzen konplexuak diren egoerak dauzkatelakoz, ebazteko modukoak direnak ideia erraz batzuk egokitasunez eta sormenez erabiliz. Hori dela eta esanen diogu matematika ezagutzen ez duen norbaiti ez dela olinpiadetako matematikaren bereizgarria gehiago, hobeki eta lasterrago kalkulatuz problemak ebaztea, baizik eta modu alternatiboan eta asmamenez pentsatzea, hain zuzen ere gutxiago kalkulatzeko, edota are ezer ere ez kalkulatzeko!

Olinpiadetako problemen beste bereizgarri bat da ez dagoela errezeta miragarririk edo huts egiten ez duen metodorik, beti funtzionatzen duen horrelakorik. Maila ertaineko edo handiko problema bakoitzeko, egoera partikular horri egokitzen zaion metodoa diseinatu behar diogu ebazten hasteko, eta prozesu logiko zuzena eta osoa eraiki ebaztera eramateko, ziurtatuz, betiere, ez dugula soka mutur askerik edo arrazonamendu ez osorik edo akastunik utzi bidean. Entrenatzeko metodotzat hartu behar dugu problemak ebazteko prozesua; funtsezkoa da hori, intuizio logiko oso egokia garatzen lagunduko baitigu, problema bati aurre egiteko moduen artean egokienak aukeratu behar ditugunean. Lagungarria da, halaber, aurretik egin ditugun problemekin alderatuz elementu komunak identifikatzea eta egoera jakin batean aplikatzekoak diren edo ez aztertzea. Olinpiadetako matematika paregabeko tresna bihurtzen da horrela, aldi berean sustatu eta garatu egiten baititu askotarikoak eta baliotsuak diren gaitasunak: asmamena eta sormena, intuizioa, patroien identifikazioa eta erabilera, estrategien diseinua eta aukeraketa, zorroztasun logikoa eta pentsamendu autokritikoa.

LIBURU HAU OLINPIADA MATEMATIKOEN TESTUINGURUAN

Olinpiada matematikoetarako gaien zerrenda ofizialik ez den arren, «funtsezko matematikaren» partetzat har ditzazkegun lau jakintza arlo biltzen dituzte, hau da, Aljebra, Konbinatoria, Geometria klasikoa eta Zenbakien teoria. Matematikaren jakintza arlo horiek asko lantzen dira beste herrialde batzuetan, baina ia erabat kanpo utzi dituzte Espainiako Bigarren Hezkuntzako gaien zerrenda ofizialean. Liburu honetako materialaren parte handi bat ahalegin gisa sortu zen (eta irakurtzen duenak balioets dezala nolako arrakasta izan duen ahalegin horrek); izan ere, Bigarren Hezkuntzako ikasleei jakintza arlo horietako batzuen ezaupidea emateko asmoz sortu zen, ikasteko bidean has daitezen. Kapitulu batzuk apur bat aurreratuagoak direla uler daiteke, esaterako, ekuazio funtzionalei dagozkienak. Garrantzitsua da, halaber, esatea ez duela ahitzen material honek gai guztia: jorratu gabe gelditzen da Geometria klasikoa, eta hartzen dituen hiru jakintza arloetan aurreneko pausoak eman baino askoz ere gehiago ez du egiten, irakurleak hortik abiatuz egin nahi dituen bezain luzeak (eta ederrak) izan daitezkeen bideetan aurrera egiteko.

Adierazi egin nahi dut, azkenik, ezen, material hau olinpiada matematikoetan parte hartu nahi duten Bigarren Hezkuntzako ikasleentzat bideratua den arren, haiek ikasten has daitezen edo aurrera egin dezaten laguntzeko sortua den arren, erabilgarria edo are polita izan daitekeela ere bai matematika atsegin dutenentzat eta asmameneko problemak oro har atsegin dituztenentzat.

I
Konbinatoria

I. 1. DIRICHLETEN PRINTZIPIOA EDO USATEGIAREN PRINTZIPIOA

Ba al dira bi berdin?

60 pertsona daude beren sakelako telefonoak konparatzen (pertsona bakoitzak zehazki sakelako bat dauka). Sakelakoak 4 fabrikatzailek eginak dira, eta fabrikatzaile bakoitzak 5 modelo ekoizten ditu. Modelo bakoitzak, gainera, baliteke kamera eta bluetooth teknologia izatea, bluetooth teknologia soilik izatea, edo kamerarik eta bluetooth teknologiarik ez izatea. Modua izanen al dugu bermatzeko bi sakelako berdin egonen direla? Eta 60 pertsona egon beharrean, 61 pertsona baldin badaude?

Fabrikatzailea izateko 4 aukera daude, modeloa izateko 5 aukera, eta osagarriak izateko 3 aukera, eta 60 sakelako mota ezberdin dira posible oro har. Zehazki 60 sakelako baldin badaude, bakoitza mota batekoa izan daiteke, eta hortaz ezin dugu bermatu bi berdin egonen direla. 61 sakelako badaude, horietako bi berdinak izanen dira ezinbestez, zeren, denak ezberdinak balira, 61 mota izanen ziren, eta 60 mota besterik ez dago, ordea.

Zenbat daude berdin?

Eman dezagun oraingoan 2009 pertsona direla aurreko kasuko sakelako telefonoen mota horiek dauzkatenak. Bila dezagun zein motak biltzen dituen sakelako telefono berdin gehien. Mota horretako zenbat sakelako bermatuko dugu egonen direla gehienez?

Mota bakoitzeko sakelakoen ahal den kopuru txikiena egoteko, ahal den modu orekatuenean banatu behar ditugu, dauden 60 mota horien artean, sakelakoak. Horrela, $2009=60\times33+29$ denez, mota bereko 33 sakelako har ditzakegu hasieran, 30 mota ezberdinetarako, eta mota bereko 34 sakelako, beste 30 mota ezberdinetarako, guztira $34 \times 29 + 33 \times 31 = 986 + 1023 = 2009$ sakelako izateko.

Ez dugu modurik, orduan, bermatzeko edozein motatako 34 sakelako berdin baino gehiago egonen direla. Badugu modua bermatzeko, ordea, mota bakoitzeko 33 sakelako baino gehiago egonen direla, zeren $60 \times 33 = 1980$ denez, 1980 sakelako baino gehiago edukitzera iristean, gutxienez mota bateko 33 sakelako baino gehiago egonen dira, bestela 60 mota baino gehiago egonen baitziren.

Usategiaren printzipioa

Honela dio usategiaren printzipioa edo Dirichleten printzipioa izenekoak: «baldin eta n zulo baldin badago usategian, eta $n+1$ uso, orduan zulo bat gutxienez egonen da, non gutxienez bi uso biziko baitira». Emaitza hori honela orokortu daiteke: baldin eta k multzo badaude, eta N elementu badaude multzo horietan banatuak, eta zilegi bada $N=a \times k+b$, idaztea, non a zenbaki osoa eta ez negatiboa baita eta b $(1,2,3,\ldots,k)$ zenbakietako bat, orduan multzo bat dago gutxienez $a+1$ elementu dituena. Aurreko kasuan 60 multzo genituen (sakelakoen motak), eta 2010 elementu (sakelakoak); hortaz $a=33$ da eta $b=30$ da, eta gutxienez ere mota bat daukagu, zeinetan $a+1=34$ sakelako baitaude gutxienez. Beste bi adibide dauzkagu, «aurretik prestatu» behar ditugunak usategiaren printzipioa aplikatu baino lehen. Horretarako hau egin behar da eskuarki: edo multzoen kopurua kalkulatu, edo multzo bakoitzean zenbat elementu beharko ditugun kalkulatu, edo zenbat elementu dauden guztira kalkulatu, edota kalkulu horien konbinazioa egin.

1. adibidea: Zenbat zenbaki karratu perfektu (zenbaki oso bat karratzearen emaitza diren zenbat zenbaki) behar ditut gutxienez, bermatzeko bi zenbaki gutxienez egonen direla, zeinen arteko kendura 5en multiploa izanen baita?

Soluzioa: edozein zenbaki oso zati 5 egiten badut, c zatidura oso bat aterako dut, eta r hondar bat, zeinak 0, 1, 2, 3 edo 4, balioak hartuko baititu, eta zenbakia honela idatziko dut: $5c+r$. Ber bi egiten badut, $5(5c^2+2cr)+r^2$ izanen da emaitza. Kontuan hartuz r^2-ren balioak 0, 1, 4, 9, edo 16 izan daitezkeela, $(5c+r)^2$ zati 5 eginez gero, berdin 0 besterik ez da izanen hondarra (baldin eta $r=0$ bada), berdin 1 izanen da (baldin eta $r=1$ edo 4 bada) edo berdin 4 (baldin eta $r=2$ edo 3 bada). Bi zenbakiren arteko kendura 5en multiploa izanen da, baldin eta soilik baldin hondar bera badute zati bost egin ondoren, hau da, eskatzen didatena da bermatzea berbidura perfektua duten bi elementu gutxienez daudela multzo berean, zati 5 egin ondoren posible diren hiru hondar multzo horietan. Usategiaren printzipioak bermatzen dit benetakoa dela hori, 4 elementu ezberdin badaude, eta gehienez 3 elementu badaude, badudala modua haiek banatzeko, gehienez ere elementu bana izan arte multzo bakoitzean (esaterako 1, 4 eta 25). Hortaz 4 berbidura perfektu hartu, eta bermatu ahal izanen dut 5en multiploa izanen dela haietako biren arteko kendura, baina ezin izanen dut hori egin berbidura gutxiagorekin.

2. adibidea: 3 metroko aldea duen hexagono erregular bat marraztu dugu planoan, eta bere barnean edo bere mugan 2009 puntu gorri ezberdin pintatu ditugu. Demostra ezazu 1 metroko aldea duen triangelu aldeberdin bat dagoela aurreko hexagonoaren barnean edo mugan, eta triangeluaren barnean edo mugan 38 puntu gorri ezberdin.

Soluzioa: hexagono erregularrean, bere diagonal nagusiak marraztuz, 3 metroko aldea duten hiru triangelu aldeberdin marrazteko modua izanen dugu. Triangelu horietako bakoitzean ere badugu modua 1 metroko aldea duten 9 triangelu aldeberdin marrazteko, alde bakoitza hiru segmentu berdinetan banatuz aurrena, eta gero lerro paraleloak marraztuz banatze puntu batetik bestera, triangeluaren alde batetik bestera (probatu zerorrek marrazkia egiten!). 1 metroko aldea duten 54 triangelu aldeberdin edukiko ditugu horrela hexagonoan, halako eran non triangelu horien barnealdeak eta mugak erabat estalzen baitute hexagonoaren barnealdea eta muga. $2009=54\times37+11$ denez, eta hexagonoan dagoenez puntu gorri bakoitza, 54 triangelu horietako batean ere egonen da, eta orduan, usategiaren printzipioaren arabera, 38 puntu gutxienez dauzkan triangelu bat egonen da gutxienez.

Ariketa proposatuak

Alegiazko herrialde batean modu bitxia dute kinieletan jokatzeko: 14 partida dauzkate emaitza asmatzeko, 1, X edo 2 dira emaitzaren aukerak eta 5 emaitza asmatzea aski da irabazteko. Zenbat kiniela egin behar ditugu gutxienez, bermatu ahal izateko haietako batekin gutxienez irabaziko dugula? Ez etsi ikustearekin kiniela kopuru jakin batekin bermatua daukagula irabaztea; gutxiagorekin ez dela aski demostratu behar duzu, gainera!

Hexagono erregular baten aldeak eta diagonalak gorriz edo urdinez pintatu ditugu (alde bakoitza edo diagonal bakoitza kolore bakar batez, alde batera utziz nola pintatzen ditugun gainerako aldeak edo diagonalak). Demostratu beti egonen dela triangelu bat, zeinaren erpinak hexagonoaren erpinak ere baitira eta zeinaren aldeak kolore berekoak baitira. Hori bera bermatzeko modua izanen dut hexagono batekin egin beharrean pentagono batekin egiten badut prozesua?

17 zenbaki oso eta ezberdin dauzkan multzo bat daukagu, eta zenbaki horietako ezein ez da zatigarri 10 baino handiagoa den ezein zenbaki lehenekin. Demostratu badaudela bi, zeinen biderkadura karratu perfektu bat baita.

Karratu baten alde bakoitza lau zati berdinetan zatitu dugu, eta lerro paraleloak marraztu ditugu karraturen alde batetik bestera zatitze puntuetatik pasatuz, eta 16 karratutxo berdin atera zaizkigu karratuan. Karratutxo horietakoren baten erpin diren 25 puntu horietako bakoitza urdinez edo gorriz pintatu dugu, alde batera utziz zein den gainerakoen kolorea. Demostratu 25 puntu horien artean badaudela kolore berekoak eta laukizuzen baten erpinak diren lau. Zer gertatuko litzateke problema bera eginen bagenu, baina hiru zati berdinetan zatituz karratuaren aldeak eta kontuan hartuz ateratzen diren 16 puntuak?

I.2. PERMUTAZIOAK ETA KONBINAZIOAK

Aukerak kontatzen

Adibide erraz batekin hasiko gara. Espainian automobilen matrikulak lau digitu dezimal dauzka eta gero hiru letra, zeinak 26 letratako alfabeto batetik ateratzen baitira. Zenbat dira egon daitezkeen matrikula ezberdinak?

Gertatzen bada elementu batzuetan bakoitzak balio ezberdinak hartzen dituela, edota modu ezberdinetan egin daitezkeela lan batzuk, baina elementu guztiak elkarren independenteak direla, aukeren kopuru osoa kalkulatzeko modua hau izaten da: elementu bakoitzak zenbat balio har ditzakeen, edo lan bakoitza guztira zenbat modutan egin daitekeen, kopuru horiek biderkatzea. Gure kasuan, lehenbiziko digituak 10 balioetatik bat har dezake; balio horietako bakoitzarentzat bigarren digituak 10 balioetatik bat har dezake, eta horrela izaten da hurrenez hurren, hirugarren letraraino iritsi arte. Letra horrek, une horretara arte dauzkagun kasuetako bakoitzarentzat, 26 balioetatik bat har dezake, guztira izan daitezkeen

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 = 175.760.000 \text{ matrikulatarako.}$$

Ikus daitekeen bezala, parrastaka dauzkagu matrikulak!

Har dezagun beste adibide erraz bat. Zenbat zenbaki daude adierazpen dezimala zehazki 6 zifratakoa dutenak? (Ohi den bezala, kendu egiten dira ezkerrean dauden zeroak).

Kasu horretan elementuetako baten balioak muga hau dauka: lehenbiziko zifra ezin da zero izan, zeren eta orduan ezkerrean dagoen zero hori kendu, eta zenbakiak gehienez 5 zifra edukiko baititu. Hortaz, lehenbiziko zifrak 9 balio posible har ditzake soilik (1,2,...,9), guztira diren

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900.000 \text{ zenbakitarako.}$$

Problema hori ebazteko beste modu bat ere badago, zeren eta 6 zifra zehazki dauzkan zenbaki txikiena 100.000 baita eta handiena 999.999, eta bien arteko zenbaki guztiek, ez beste ezein zenbakik gehiago, 6 zifra baitauzkate zehazki, guztira diren

$$999.999 - 100.000 + 1 = 900.000 \text{ zenbakitarako.}$$

Bat gehituko diogu 999.999 eta 100.000 zenbakien arteko kendurari, biek 6 zifra baitauzkate eta biak kontatu behar baitira.

Beste adibide batekin jarraituko dugu. Musean jokatzean 4 karta banatzen zaizkio jokalari bakoitzari 40 karta ezberdin dituen karta sorta batetik. Zenbat modu ezberdin daude musean niri 4 karta horiek banatzeko? Zenbat modu daude niri 4 erregeak suertatzeko?

Dena dela, banatzen den lehenbiziko karta zein suertatzen den, horrek beste hirurei eragiten die, zeren eta hiru horietako ezein ezin baita izan lehenbizikoaren berdina, lehenbizikoa banatua dago eta. Hortaz, banatzen didaten lehenbiziko karta 40ren arteko bat bada ere, gainerako 39en arteko bat izanen da ezinbestez bigarren karta, hirugarrena gainerako 38en arteko bat, eta laugarrena gainerako 37en arteko bat, lau karta banatzeko guztira dauden

$$40 \times 39 \times 38 \times 37 = 2.193.360 \text{ modu posibleetatik.}$$

Lau erregeak niri suertatzeko, lau errege horietako bat izanen da lehenbiziko karta, bigarrena gainerako hiruren arteko bat, hirugarrena gainerako biren arteko bat, eta azkenekoa gelditzen den erregea izanen da, lau errege banatzeko guztira dauden

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ modu posibleetatik.}$$

Bat-batean oso zaila dirudi lau errege edukitzea!

Ordenak ba al du garrantzirik?

Alda dezagun zertxobait aurreko problema. Zenbat eskualdi posible daude musean? Hau da, nire lau kartak eskuan dauzkadanean, jokaldirako ez denez garrantzitsua zein ordenatan etorri zaizkidan, zenbat 4 kartatako talde posible izatera iritsiko naiz musean jokatzen? Zenbat eskualdi dira 4 errege dauzkatenak?

Azkeneko galderaren erantzuna garbia da: eskualdi batek bakarrik dauzka 4 erregeak, baina lau erregeak iristen zaizkidanean eskura! Ez da garrantzitsua kasu honetan zein ordenatan etorri zaizkidan. Aurrena urre saileko erregea iritsi izanen zait agian, gero kopa sailekoa, ezpata sailekoa geroago, eta bastoi sailekoa azkenean (UKEB), baina beste edozein ordenatan iristeko aukerak asko dira (KBEU, BUEK...). Izan ere, lauretako edozein izan daitekeenez lehenbizikoa, gero gainerako hiruretatik edozein, gainerako bietatik edozein geroago, eta falta zaidan bakarra azkenean,

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ modu posible daude 4 erregeak ordenatzeko.}$$

Kartak modu ordenatuan, banan-banan, hartzen baditut, 4 erregeak niri etortzeko zenbat modu dauden, beste hainbeste modu daude ordenatzeko, jakina! Ikusten dugunez, 4 errege dituzten eskualdien kopurua guztira, honen emaitza da: 4 erregeak banatzeko moduen kopurua zati 4 errege horiek ordenatzeko moduen kopurua. Eskualdi posible guztien kasuan berdin gertatzen da; 4 karta eskuan dauzkadanean, 24 ordena posible izan dira niri karta horiek iristeko, baina ordenatzeko 24 modu horietako bakoitza zehazki eskualdi bati dagokio, hau da, 4 karta horiek eratzen duten eskualdiari dagokio, alde batera utziz zein ordenatan iritsi zaizkidan. Hortaz,

$$\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 91.390 \text{ eskualdi posible ezberdin daude musean.}$$

Kopuru horri honela esaten zaio: «40 kartatako konbinazioak launaka hartuak», eta 40 karta ezberdi nen artetik har daitezkeen 4 kartatako taldeen kopuru posiblea da, alde batera utziz ordena.

Ordenatzeko moduak: permutazioak

Adibide erraz honetan aski izan dugu kontatzen joatea, baina ba al da pentsatzeko eta kalkulatzeko modu orokorren bat adibide zailagoetan aplikatzeko? Ematen duen arren «buelta gehiago ematen» ari garela, pentsa dezagun bestela. Zenbat modu daude karta sortaren 40 kartak ordenatzeko? Lau erregeak ordenatzeko aurreko arrazoibide berari jarraikiz, ikusten dugu

$40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35 \times \ldots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ modu daudela karta sorta ordenatzeko. Biderketa hori egiten badugu, lehenbiziko zenbakia 8 duen 48 zifratako zenbaki bat aterako zaigu. Laburbilduz, zenbaki hori, are biderkadura moduan idatziz ere, oso luzea denez, honela idatziko dugu: 40!, eta, oro har, 1etik hasi, eta n-raino doazen zenbakien biderkadura honela idatziko dugu: $n!$, eta horri n faktoriala edo n-ren faktoriala esanen diogu; halatan esanen dugu 4!=24 modu daudela 4 erregeak ordenatzeko, edo 10!=3.628.800 modu ezberdin urre saileko 10 kartak ordenatzeko. Multzo baten permutazioak edo multzo bateko elementuen permutazioak esaten diegu elementu horiek ordenatzeko modu posibleei, eta multzoak n elementu ezberdin baldin baditu, n elementu horien permutazio kopurua berdin

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \text{ da.}$$

Faktoriala eta bere propietateak

n-ren faktoriala, $n!$ moduan idazten dena, 1-en eta n-ren artean dauden zenbaki osoen biderkadura da; hortaz, 6-ren faktoriala

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ da.}$$

$0!=1$ moduan definituko dugu, ikusi dugun bezala, n-ren faktoriala n elementu ezberdin ordenatzeko moduen kopurua delakoz batez ere. 0 elementu baldin baditugu, modu bat egonen da zehazki horiek ordenatzeko: ezein ez hartzea! Ikusiko dugun moduan, gainera, hobeki funtzionatzen dute horrela beste propietate batzuk.

Adibidez, erraza da ikustea

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \text{ dela.}$$

Izan ere, n aurreneko zenbaki positibo osoen biderkadura bider $n+1$ egiten badugu, $n+1$ aurreneko zenbaki positibo osoen biderkadura edukiko dugu garbiki. Horrez gain $n=0$ egiten badugu, propietate hori berdin betetzen da $0!=1$ definitzen dugunean, egin dugun bezala, zeren orduan $1!=1\times 0!=1$ baita.

Erraza da egiaztatzea ezen

$$\frac{(n+m)!}{n!} = (n+m)\times(n+m-1)\times(n+m-2)\times\ldots\times(n+2)\times(n+1)$$

dela, izan ere, $(n+m)!$ biderkaduran azaltzen diren eta $n!$-n, ordea, azaltzen ez diren zenbakiak n baino handiagoak baina $n+m$-ren berdinak edo txikiagoak diren zenbaki oso guztiak baitira. Adibidez

$$\frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4.$$

Banatzeko moduak: konbinazioak

Nola baliatuko dugu hori musean posible diren eskualdien kopurua kalkulatzeko? Eman dezagun 40! modu posibleetako edozeinetan ordenatu dugula karta sorta, eta niri aurreneko 4 kartak etortzen zaizkidala banaketan. Etorriko ez zaizkidan gainerako 36 kartak ordenatzeko modua 36 elementuren 36! permutazio posibleetako bat izan daiteke, eta etorri zaizkidan 4 horiek ordenatzeko modua 4 elementuren 4! permutazio posibleetako bat izan daiteke. 36! bider 4! egiten dugu jakiteko 40 karten zenbat permutazio dauden karta berak izateko aurreneko 4 kartak, elkarrekin independenteak direlakoz aurreneko 4 kartak ordenatzeko moduak eta azkeneko 36 kartak ordenatzeko moduak. Bi karta multzo horiek modu independentean ordenatzeko 36!4! moduetako bakoitzeko, karta berak dira etorriko zaizkidan 4 kartak: aurreneko 4ak! Modua edukiko dut, orduan, honela kalkulatzeko halaber zenbat eskualdi edukiko ditudan:

$$\frac{40!}{36!\,4!} = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

Emaitza bera edukiko dut! Zenbateko horri esaten zaio «40 kartatako konbinazioak launaka hartuak», eta laburtzeko honela idazten da:

$$\binom{40}{4}$$

Eskuarki n elementu ezberdinetako multzo bat baldin badaukat, eta kalkulatu egin nahi badut zein diren multzo horretan dauden m elementuku azpimultzo guztiak m elementu horien ordena kontuan hartu gabe, esanen dut

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

modu daudela m elementu hartzeko n elementu ezberdinen artetik, eta sinbolo hori eta zenbateko hori esanen dut direla n elementuren konbinazioak m-nako multzoetan hartuak, edo, bestela, n konbinazio zenbakia m-ren gainean.

Ikus dezagun azken adibide bat: Osasunaren plantillan 3 atezain daude, 8 defentsa, 7 erdilari eta 4 aurrelari. Zenbat modu posibletan egin dezakegu 4 defentsa, 4 erdilari eta 2 aurrelari dauzkan talde bat? (eman dezagun ez dugula bereizten erdikoa eta hegalekoa edota eskuina eta ezkerra); eta kalkulatu egin nahi badut lau defentsa eta 4 erdilari eta 2 aurrelari, edota lau defentsa eta 3 erdilari eta 3 aurrelari dituzten zenbat talde posible dauden?

Hau da lehenbiziko galderaren erantzuna:

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{4}\times\binom{4}{2} = \frac{3!}{2!\,1!}\times\frac{8!}{4!\,4!}\times\frac{7!}{4!\,3!}\times\frac{4!}{2!\,2!} = 3\times 70\times 35\times 6 = 44.100$$

talde posible.

Aukera badudanez atezain bat hartzeko 3ren artetik, 4 defentsa 8ren artetik, eta hautaketa bakoitza independentea denez besteekin, biderkatu egin behar ditut elkarrekin talde bakoitzetik jokalariak hautatzeko modu posibleak, jakiteko zein den talde posibleen kopurua guztira.

Jakin nahi badut zein diren 3 erdilari eta 3 aurrelari dituzten talde posibleak, orduan

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{3} = \frac{3!}{2!\,1!}\times\frac{8!}{4!\,4!}\times\frac{7!}{3!\,4!}\times\frac{4!}{3!\,1!} = 3\times 70\times 35\times 4 = 29.400$$

talde posible aterako zaizkit.

4 edo 3 erdilari dituztenen kasuak, independenteak ez ezik, disjuntuak ere badira, hau da, edo bat gertatzen da, edo bestea gertatzen da, baina ez biak aldi berean. Hortaz, bi kasuetako aukeren batuketa egin behar dut, 4-4-2 edo 4-3-3 osaera duten taldeak guztira hauek izateko:

$$\binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{4}\times\binom{4}{2} + \binom{3}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{3} = 44.100 + 29.400 = 73.500.$$

Konbinazio zenbakiak eta beren propietateak

Honako zenbaki honi:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

n konbinazio zenbakia m-n esaten zaio, edo n konbinazio zenbakia m-ren gainean, edota n elementuren konbinazioak m-nako multzoetan hartuak, eta, ikusi dugunez, zenbaki hori da zenbat modu posible dauden m elementu hartzeko n elementu ezberdin dauzkan multzo batetik. Garbi dago m ezin dela 0 baino txikiagoa izan, ezta n baino handiagoa ere, ezin baitut hautatu elementu kopuru negatibo bat, eta n elementuren artetik ezin baitut hautatu n elementu baino gehiago. Hona hemen konbinazio zenbakien propietate interesgarri batzuk (kontrakoa esaten ez bada, negatiboa ez den edozein zenbaki oso izan daiteke n , eta m, berriz, negatiboa ez den edozein zenbaki oso n-ren berdina edo txikiagoa):

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

modu bat bakarrik dagoelakoz 0 elementu hautatzeko (ezein ez hautatzea) edo n elementu hautatzeko (denak hautatzea).

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$$

modu berak daudelakoz m elementu hautatzeko n elementuren artetik edo $n-m$ hautatzeko; aski dut ikustea m hautatzeko modu bakoitzeko modu bat dagoela zehazki $n-m$ hautatzeko (m hautatzen dudanean, hautatu gabe gelditzen diren $n-m$ horiek).

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

n elementu ezberdinen artetik elementu bat hautatzeko, n hautagai dauzkadalakoz, eta $n-1$ hautatzeko, aldiz, aski daukadalakoz n hautagai ezberdinen artetik bat hautatzea, hori baztertzea, eta gainerako $n-1$- ekin gelditzea:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Berdintasun hori eragiketak eginez demostra daiteke, zeren izendatzaile komuna kalkulatuz eta batuketa eginez,

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} =$$

$$\frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = \binom{n+1}{m+1}$$ baita.

Emaitza horrek, haatik, interpretazio oso garbia du: ikus dezagun m+1 elementuren zenbat talde ezberdin hartzen ahal diren n+1 elementu dauzkan multzo batetik; n+1 elementuetako bat hautatuko dugu, eta azkena dela esanen dugu. Dena dela, m+1 elementu hautatzeko n+1 elementuen artetik, bi modu posible eta disjuntu daude: edo azkeneko elementu hori hartuko dugu, eta beste m elementu hautatuko ditugu gainerako n elementuetatik, edo ez dugu azkeneko elementu hori hartuko, eta m+1 elementu hautatuko ditugu gainerako n elementuetatik. Posible diren n+1 elementuren artetik m+1 elementuko taldeak sortzeko bi modu horien batuketa eginez atera egin behar ditugu posible diren talde guztiak.

Ariketa proposatuak

Zehazki 5 zifratako zenbat zenbakik daukate behin gutxienez 3 zifra? Haietako zenbatek dauka behin bakarrik 3 zifra?

5 zuzen dauzkagu planoan, halako eran non haietako hiru ez baitira bat etortzen puntu batean. Zuzenetako ezein ez bada paraleloa beste ezeinekin, zenbat ebaketa puntu daude bi zuzenen artean?; zenbat ebaketa puntu daude, paraleloak badira haietako 3 zehazki, eta beste 2ak ez badira paraleloak elkarrekin ezta aurrekoekin ere?; zein dira ebaketa puntuen kopuruak har ditzakeen balio posible guztiak?

Pokerrean jokatzeko 52 kartatako sorta frantziar bat behar da (4 sail eta zenbakiak txikiagotik handiagora ordenatuak, honela: 2,3,4,...,10,J,Q,K,A). Jokalari bakoitzari 5 karta banatzen zaizkio. Kalkulatu zenbat eskualdi guztira izan ditzakeen jokalari batek, eta eskualdietan zenbat modu daude jokaldi hauek izateko:

- Hiruko bat soilik (3 karta elkarren berdin dira, eta beste 2ak elkarren ezberdin eta ezberdinak beste 3 horiekin).
- Full house (3 karta elkarren berdin dira, eta beste 2ak elkarren berdin baina ezberdinak aurreko 3 horiekin).
- Eskailera (5 karten zenbakiak kontsekutiboak dira, alde batera utziz zein sailetakoak diren).
- Kolorezko eskailera (5 kartak sail berekoak dira, eta beren zenbakiak kontsekutiboak dira).
- Kolorezko jokaldia soilik (5 kartak sail berekoak dira, baina ez kontsekutiboak).

Kalkulatu 1, 2, 3,..., 9 zifra bakoitza zehazki behin bakarrik duten 9 zifratako zenbaki guztien batura.

Konpainia batek 5 zuzendari ditu, eta kutxa gotor batean gordetzen ditu konpainiak bere sekretuak. Sarrail kopuru minimoa jarri nahi dute, bermatzeko, zuzendari bakoitzari giltza kopuru bera emanez, zuzendarien edozein gehiengok

(3k edo gehiagok) izan dezan kutxa irekitzeko modua, eta ezein gutxiengok (2k edo gutxiagok) ezin dezan ireki. Zenbat sarrail jarri behar dira eta zenbat giltza emanen diote zuzendari bakoitzari?

I.3. INDUKZIO PRINTZIPIOA

Adibide erraz bat hasteko

Progresio aritmetikoei buruz hitz egiten entzun badugu (zenbaki serieak dira, zeinetan bi kontsekutibo bakoitzeko, beti bera baita bi horien arteko kendura, esaterako, 1, 4, 7, 10,...), ez zaigu erraza izanen segur aski gai horietako batzuen batura kalkulatzea, kontsekutiboak direnean betiere, eta are gehiago eskatzen badigute n aurreneko zenbaki positibo osoen batura kalkulatzea, hau da, $1+2+3+...+n$. Zenbaki horiek berak alderantziz idazten baditut, eta gero serie bakoitzeko bi aurrenekoak gehitzen hasten banaiz, serie bakoitzeko bi bigarrenak eta abar, ikusiko dut nola izanen dudan emaitza hau batuketa bakoitzeko: $1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=... =(n-1)+2=n+1$, hau da, n batura edukiko ditut, eta bakoitzaren balioa $(n+1)$ izanen da, aurkitu behar dudan zenbakiari bere balio bera batzen diodanean. Hona hemen, beraz, emaitza n zenbaki positibo oso bakoitzeko:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Eragiketa egiteko modu horrek ez dit balioko, ordea, $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ batuketaren emaitza aurkitu behar badut n edozein zenbaki positibo osorentzat, edo, are makurrago, $1^3+2^3+3^3+...+n^3$ batuketaren emaitza aurkitu behar badut.

Betetzen al da zenbaki positibo oso guztientzat?

Galdetu egiten digute batzuetan propietateren bat betetzen ote den zenbaki positibo oso guztientzat. Ezin hasi denak probatzen, infinitu baitaude! Demostrazioa erraz samarra izaten da batzuetan, eta ez, ordea, beste batzuetan. «Saltoa infinitura egiten» laguntzen digu indukzio printzipioak, honela: demagun zerbait demostratu behar dudala (1,2,3,...) seriarentzat, eta erraz demostra dezakedala 1-entzat betetzen dela. Demostratzera iristen banaiz, gainera, zenbaki natural batentzat betetzen bada, hurrengoarentzat ere beteko dela, denentzat betetzen dela demostratuko dut orduan! 1-entzat betetzen denez, eta hurrengoarentzat ere betetzen denez, 2-rentzat ere beteko da; baina orduan hurrengoarentzat ere beteko da, hau da, 3-rentzat eta gainerakoentzat: 4, 5,... Di-da infinitura iritsi gara, eta bi urratsetan bakarrik! Lehenbiziko urratsa demostratzea da kasu partikular batentzat (oinarrizko kasuarentzat) betetzen dela hori, eta bigarrena demostratzea da zenbaki oso batentzat betetzen bada, hurrengoarentzat ere beteko dela.

Ikus dezagun nola funtzionatuko lukeen horrek aurreko adibidean, hau da, demagun indukzioz modu espezifikoan demostratzea eskatzen digutela n zenbaki positibo oso ororentzat hau betetzen dela:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

n=1 denean, lehenbiziko zenbaki positibo osoaren batura 1 da, eta betetzen du demostratu nahi dugun formula, zeren n=1 eginez formula horretan hau baitaukagu:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

eta egia da garbiki. Eman dezagun orain aurreko formula balioduna dela n-rentzat («indukzio hipotesia» esaten zaio ontzat emateari n balioarentzat egiazkoa dela demostratu nahi dugun emaitza). Zer gertatuko litzateke n+1-entzat? Badakigu n aurreneko zenbakien batura zein den, eta, hortaz, aski dugu n+1 gehitzen badiogu:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}\,.$$

Formula hori n-ren formularen berdin-berdina da, baina n+1 dago bere ordez, eta, hortaz, betetzen bada n- rentzat, berdin beteko da n+1-rentzat, hau da, 1-entzat betetzen denez, 2-rentzat ere betetzen da, eta horrenbestez 3-rentzat ere bai, eta gainerakoentzat: 4, 5,..., hau da, zenbaki positibo oso guztientzat betetzen da.

Multzo baten parteen multzoa

4 elementu dauzkan edozein A multzo daukagu, zeinari $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ esanen baitiogu. A-ren parte guztien multzoa A-ren azpimultzo posible guztiek osatzen duten multzoa da (bai, «zenbait elementu soltek» osatu beharrean, «zenbait multzok» osatzen duten multzoa definitzeko modua badugu). Dakigun bezala, multzo guztien azpimultzoa da $\varnothing=\{\}$ multzo hutsa edo elementurik ez daukan multzoa. Era berean multzo oro da bere buruaren azpimultzoa. Bi badauzkagu dagoeneko. Horrez gain, elementu bakar bateko azpimultzo guztiak dauzkagu, zeinak 4 baitira (elementu bakoitzeko bat), 2 elementuko azpimultzo guztiak eta 3 elementuko azpimultzo guztiak. Kalkula dezakegu 16 direla guztira, eta hori «kasualitatez» 2^4 da. Idazten badugu, A-ren parteen multzoa ($P(A)$ esanen diogu laburtzeko) honako hau idatziko dugu:

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{\ \}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \\ \{a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \end{array} \right\}$$

Egin dezagun beste multzo bat ematen digutela orain, zeinak n elementu baitauzka, $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$, eta non n-k orain edozein balio positibo oso har baiteзake. Zenbat elementu edukiko ditu multzo horren parteen multzoak? Esaten digute 2^n dela balio hori, zein den ere n, baina eskatzen digute n- ren balio natural infinituetarako hori demostratzea! Pentsatuko genuke, beharbada, oso zaila dela hori, baina indukzio printzipioa daukagu zorionez, eta jarraian aplikatuko dugu:

1. urratsa: n=1 kasua. n=1 denean, $A=\{a_1\}$ multzo bat edukiko genuke, zeinak zehazki bi azpimultzo baititu: hutsik dagoen multzoa eta A multzo bera. Kasu honetan, beraz, A-k zehazki $2=2^1$ elementu dauzka, eta emaitza betetzen da.

2. urratsa: demagun n-rentzat betetzen dela emaitza, eta n-ren balioa 1 edo handiagoa dela, eta ikus dezagun n+1-entzat ere betetzen dela, zein den ere n-ren balioa; garbi dago «edozein zenbaki positibo osorentzat betetzen bada, hurrengoarentzat ere betetzen da» esatea bezalakoa dela hori. Hau edukiko genuke orduan: $A=\{a_1,a_2,a_3,..., a_{n+1}\}$. A-ren azpimultzoak bi motatakoak dira: a_{n+1} barnean hartzen dutenak, eta a_{n+1} barnean hartzen ez dutenak. Mota bakoitzeko zenbat azpimultzo daude? Garbi dago ezen multzo bat baldin badut, zeinak $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$-ren azpimultzo bat eta $\{a_{n+1}\}$ multzoa biltzen baititu, bildura den multzo hori A-ren azpimultzoa ere izanen dela, eta, alderantziz, a_{n+1} daukan A-ren azpimultzo oro $\{a_{n+1}\}$-ren eta $\{a_1,a_2,a_3,..., a_n\}$-ren azpimultzo baten bildura izanen da. Indukzio hipotesiaren bidez ontzat ematen baitut $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$-ren 2^n azpimultzo daudela zehazki, orduan lehenbiziko mota honetako A- ren 2^n azpimultzo daude zehazki. Horrez gain a_{n+1} ez daukan A-ren edozein azpimultzo $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$- ren azpimultzoa da garbi, eta alderantziz, hau da, a_{n+1} ez daukaten A-ren bezainbeste azpimultzo daude nola $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$-ren azpimultzo dauden, eta berriz ere bigarren mota honetako A-ren 2^n azpimultzo dira. Horrenbestez, baldin eta n elementu dituen multzo batentzat bere parteen multzoak 2^n elementu baditu, orduan n+1 elementu dituen multzo batentzat bere parteen multzoak $2^n+2^n=2^{n+1}$ elementu edukiko ditu, eta demostratu behar dugun emaitza zenbaki oso batentzat betetzen bada, hurrengoarentzat ere betetzen da. Eta kito!

n zenbaki oso ororen kasuan 3-ren multiploa da 3n+1 forma duen zenbakia

Eman dezagun (indukzio hipotesiaren bidez) egiazkoa dela 3ren multiploa dela n-rentzat $3n+1$. Orduan m zenbaki oso bat egonen da, halakoa non $3n+1=3m$ baita. Baina n+1-entzat $3(n+1)+1=3m+3=3(m+1)$ dela edukiko genuke, non m+1 osoa baita m ere halakoa delakoz, eta n zenbaki oso batentzat betetzen bada, n+1 hurrengo osoarentzat ere beteko da.

Ezinezkoa den zerbait demostratu dugu? Ez, ez dugu demostratu, hasierako kasua falta zaigulakoz. Hasierako kasuan, n=1 denean, 3-ren multiploa beharko luke 4k, eta hori faltsua da dakigun bezala. Hasierako kasua ahazten badugu, garbi dago ez dugula ezer ere demostratu oraindik orain! Bestela, ikusi berri dugun adibidearen arabera, erabat ezinezkoa den zerbait demostratzera iritsiko ginateke!

Indukzioa: n aski ez dugunean

Eman dezagun n+1 zenbaki osoarentzat zerbait betetzen dela demostratzeko ez dudala aski ontzat ematea n-rentzat ere betetzen dela, eta n+1 baino txikiagoak diren zenbaki positibo oso guztientzat ere betetzea behar dudala. Zer egin horrelakoetan? Ezin dut aplikatu indukzio printzipioa oraingoan? Bada, demostratuz gero n=1 hasierako balio batentzat betetzen dela, eta n+1 baino txikiagoa den zenbaki oso ororentzat betetzea behar badut n+1-entzat betetzen dela demostratzeko, ez dago arazorik n=1 denean, zeren 1 baita 2 baino txikiagoa den zenbaki positibo oso bakarra, eta zenbaki horrentzat badakit egiazkoa dela emaitza. n=2 denean ere ez daukat arazorik, demostratu baitut emaitza egiazkoa dela 1-entzat eta 2- rentzat, zeinak 3tik beherako positibo oso guztiak baitira, eta, hortaz, 3-rentzat ere egiazkoa izanen da emaitza, eta horrela izaten da hurrenez hurren. Hau da, indukzio hipotesi gisa erabil dezaket ez bakarrik emaitza n-rentzat betetzen dela, baizik eta 1,2,3,...,n-rentzat ere betetzen dela, n+1-entzat betetzen dela demostratu behar dudanean.

Indukzioa «saltoka»

Gerta daiteke oso erraz demostratzea ezen eskatzen diguten emaitza n-rentzat betetzen bada, orduan n+3-rentzat ere beteko dela, baina neke handiz demostratzen da n-rentzat betetzen bada, orduan n+1-entzat ere beteko dela. Zer egin horrelakoetan? Bada, n=1-entzat betetzen bada, orduan badakigu n=4-rentzat beteko dela, eta hortaz n=7-rentzat ere betetzen dela, eta beste hauentzat ere bai: 10,13,16,... Horrekin ez dugu aski, baina demostratzen badugu gainera emaitza n=2-rentzat betetzen dela, demostratu izanen dugu n=5,8,11,...-rentzat ere betetzen dela, eta baldin eta azkenean demostratzen badugu emaitza n=3-rentzat betetzen dela, n=6,9,12,...-rentzat ere betetzen dela demostratu izanen dugu.

Orain bai demostratu izanen dugula zenbaki positibo oso ororentzat! Ohartu, hortaz, ez dugula indukzioa «banan-banan» aplikatu behar, eta saltoka ibil gaitezkeela, baldin eta demostratzen ditugun hasierako kasuak aski badira, eta hasierako kasuetako batetik abiatuz, «saltoak eginez» edozein zenbaki positibo osoraino iritsiko gara, propietateak betetzen jarraitzen duela demostratzeko moduko tamainakoak badira salto horiek.

Adibide bat: demostratu indukzioz berbidura perfektu orok 0 hondarra duela edo 1 hondarra duela zati 4 egiten dugunean.

Soluzioa: berbidura perfektu guztiak dira n^2 formakoak n=1,2,3,...-rentzat, eta erraza da ikustea $(n+2)^2=n^2+4(n+1)$ denez, nola ematen duten n^2-k eta $(n+2)^2$-k hondar bera zati 4 egiten dugunean, eta hortaz emaitza egiazkoa bada n-rentzat, orduan egiazkoa izanen da n+2-rentzat. Beharrezkoa dugu (eta aski dugu) demostratzea emaitza egiazkoa dela n=1 hasierako kasuetarako, zeinetarako n^2=1-ek 1 baitu hondarra, zati 4 egiten dugunean, eta n=2-rako, zeinerako n^2=4-k 0 baitu hondarra, zati 4 egiten dugunean. Garbi dago edozein zenbaki positibo oso bikoitiraino irits gaitezkeela saltoak binaka eginez n=2-tik abiatuz, eta edozein zenbaki positibo oso bakoitiraino, saltoak binaka eginez n=1-etik abiatuz, eta horrela denez, horra hor soluzioa! Erraza da ikustea, gainera, ezen berbidura perfektua zenbaki bikoiti baten berbidura bada, orduan 0 hondarra izanen duela (4-k bezala) zati 4 egiten dugunean, eta zenbaki bakoiti baten berbidura bada, orduan 1 hondarra izanen duela (1-ek bezala) zati 4 egiten dugunean. Ausartuko zinen orain demostratzera berbidura perfektu orok, zati 8 egiten dugunean, 0, 1 edo 4 duela hondarra?

Zer egiten dugu zer demostratu ez dakigunean?

Zerbait demostratzea eskatu digute aurreko kasuetan. Zer egin, ordea, adierazpen bat aurkitzeko eta demostratzeko eskatzen badigute, baina jakin gabe nolakoa den adierazpena? Eman dezagun hasierako n berbidura perfektuen baturaren balioa aurkitzea eskatzen digutela; errazago izateko S_n esanen diogu batura horri. Garbi dago n=1-entzat $S_1=1^2=1$ dela, n=2-rentzat $S_2=1^2+2^2=5$ dela, n=3-rentzat $S_3=1^2+2^2+3^2=14$ dela, etab. Zein da, ordea, formula orokorra? $1,2,3,\ldots,n$ -ren batura adierazteko modu bat, lehenago ikusi dugun bezala, n-rekiko 2. graduko polinomio bat denez, pentsatuko dugu $1^2,2^2,3^2,\ldots,n^2$ -ren batura n-rekiko 3. graduko polinomio baten bidez adieraziko dugula beharbada (kasu bakoitzean 1 gehituz emaitza ematen digun polinomioaren graduari, batugaiek duten graduari dagokionez). Kasu orokorrenean (eta oraindik ez dakigu egiazkoa den edo ez), hau izanen litzateke, agian?:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=an^3+bn^2+cn+d$$

Adierazpen horretan kalkulatu behar ditudan konstanteak dira a, b, c eta d. Kalkulatzen errazenak diren kasuak erabiliko ditut konstante horiek ateratzeko, hau da, n -ren balioa 1, 2, 3 eta 4 duten kasuak. Hortaz, hasierako n berbidura perfektuen baturak benetan forma hori baldin badu, 4 ezezagun dituzten 4 ekuazioko sistema bat sortzeko modua izanen dugu, eta aldagaiak ezabatuz ebatziko dugu, kenketa hau eginez: ekuazio bakoitza ken sistemako aurrekoa.

$$\left\{\begin{array}{c} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 19a+5b+c=9 \\ 37a+7b+c=16 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ 18a+2b=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ 6a=2 \end{array}\right\}$$

a-ren balioa aterako dugu orduan laugarren ekuazioan, ordezkapena eginen dugu hirugarrenean b ateratzeko, bigarrenean c ateratzeko, eta, azkenean, d aterako dugu lehenbiziko ekuazioan. Hau al da ondoriozko hipotesia?:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Indukzio bidez demostratu nahi duguna hori da, egiazkoa ote den (oraindik ez dakigu). Garbi dugu, n=1-en ordezpena eginez, eskuineko atalak 1 balio duela, eta hortaz betetzen dela hasierako kasurako. Hala ere, n-rentzat betetzen bada, hau edukiko genuke:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + n^2 + 2n + 1 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$$= \frac{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + (n+1)}{6} = \frac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)}{6}$$

zeinarekin n+1-entzat ere beteko bailitzateke, eta orain badakigu egiazkoa dela geuk aieruz hartu dugun emaitza, eta bukatu dugu.

Aieruz hartu ondoren hipotesi bat, hau da, pentsatu ondoren aurkitu behar dudan zerbaitek forma jakin bat hartzen duela, daitekeena da konturatzea hori ez dela horrela, kasuren baterako betetzen ez dela konturatzea. Esaterako, aurreko kasuan aurkitu dugun hipotesiak n=1,2,3,4-rako balio du, baina ez beharbada n=5-erako. Atzera egin beharko nuke orduan eta beste hipotesi bat aieruz hartu.

Ausartuko zinateke indukzioz demostratzera zenbat balio duen n hasierako kuboen baturak, hau da, zenbat balio duen $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ adierazpenak edozein n zenbaki positibo osorako? Lagungarri bat: n-rekiko 4. graduko polinomio baten moduan adieraz dezakegu balioa.

Zenbaki oso handietarako zerbait demostratzea eskatzen digutenean

Zenbaki positibo oso ororentzat zerbait demostratzea ez digute eskatzen batzuetan, baizik eta zenbaki oso jakin batentzat, baina hain izugarri handia izaten da zenbaki oso hori ezen, «aberezko indarrez» saiatuko bagina, urteak beharko baikenituzke! Hobe izaten da batzuetan zenbaki positibo oso ororentzat demostratzea, edota formula bat aurkitzea eta zenbaki positibo oso ororentzat formula hori demostratzea, eta gero formula hori eskatu didaten kasuari aplikatzea. Proposatu ditugun ariketetan azkenekoa izan daiteke horrelako kasu bat.

Ariketa proposatuak

Zenbaki osoen segida bat definituko dugu, honela: a_1=1 da, a_2=1 da, eta 2 baino handiagoa den n zenbaki oso ororentzat $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ dela kalkulatu dugu aurreko balioen arabera; hau da, segidaren elementu bakoitza, aurreneko biak izan ezik, aurreneko bien batura da. (1,1,2,3,5,8,13,21,34,...) izanen litzateke orduan segida hori, eta Fibonacciren segida esaten zaio, eta osatzen duten zenbakiei Fibonacciren zenbakiak. Demostratu indukzioz emaitza hauek:

1) $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

2) 5-en multiploa bada n, orduan a_n ere 5-en multiploa izanen da.

3) 2-ren berdina edo handiagoa den n zenbaki ororentzat hau betetzen da:

$$a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$$

Demostra ezazu indukzioz Newton-en binomioaren formula, hau da, a, b edozein balio konstanterentzat eta edozein n zenbaki positibo osorentzat hau edukiko dugula:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

2.009 nenufar daude ilaran urmael batean, eta aurrena kolore bat eta gero beste bat duten loreak, honela: lore zuria, lore urdina, zuria, urdina..., zuria. Igel bat saltoka dabil aurreneko nenufarretik azkeneraino, ez du noranzkoa aldatzen (hau da, ez du atzera egiten), eta halatan nenufar batetik bestera egiten duen salto bakoitzean ezberdina dute kolorea bi nenufar horietako loreek. Demostratu 3-ren multiploa dela igelak har ditzakeen bide ezberdinen kopurua (hau da, zenbat salto sekuentzia daude, zeinen diferentzia gutxienez baita igela posizioz aldatu dela salto bat egin ondoren).

Lagungarri bat: c_n esaten badiogu posible diren bideen kopuruari $2n+1$ nenufar daudenean, demostra ezazu honako hau betetzen dela n zenbaki positibo oso ororentzat:

$$c_{n+2} = 2\ c_{n+1} + c_n + c_{n-1} + \ldots + c_2 + c_1 + 1$$

eta aplikatu indukzioa c_{n+2} hori c_{n+1}-ren eta c_n-ren arabera soilik jartzeko.

I.4. KONBINATORIAKO PROBLEMAK - HASIERAKO MAILA

4. problema, 1999ko fase nazionalekoa.
Kutxa batean 900 txartel daude, 100 zenbakitik 999raino zenbakituak. Ausaz (berriz sartu gabe) atera ditugu kutxatik txartel batzuk, eta idatzi egin dugu txartel bakoitzaren digituen batura. Zein da atera behar dugun txartel kopuru txikiena, batura horietako hiru gutxienez berdinak izanen direla bermatzeko?

6. problema, 2001eko fase lokalekoa.
Bederatzi pertsonak lau bilera egin dituzte mahai borobil baten inguruan eseriak zeudela. Egin ahal izan dituzte bilera horiek, pertsona horietako bi elkarren ondoan eseri gabe, bilera horietako batean baino gehiagotan? Arrazoitu erantzuna.

8. problema, 2001eko fase lokalekoa.
Kubo baten 27 puntu hauek hartzen ditugu kontuan: zentroa (1), aurpegien zentroak (6), erpinak (8) eta ertzen zentroak (12). Urdinez edo gorriz koloreztatu behar dugu puntu horietako bakoitza. Egin daiteke hori kolore bereko hiru puntu egon ez daitezen lerrokatuak? Demostra ezazu.

4. problema, 2002ko fase lokalekoa.
Futbol talde batek 11 jokalari ditu, eta kamisetak 1etik 11raino dauzkate zenbakituak. Ausaz 6 jokalari hautatu ditugu. Zein da probabilitatea beren kamiseten zenbakien batura bakoitia izateko?

5. problema, 2002ko fase lokalekoa.
Olinpiada matematikoaren azkeneko fasean iaz parte hartu zuten 120 ikasleen adinen batura 2002 urtekoa izan zen. Demostratu haietako 3 hautatuko zenituzkeela, eta beren adinen batura ez litzatekeela izanen 51 urtetik beherakoa.

1. problema, 2003ko fase lokalekoa (ostiralekoa).
Zenbaki oso eta positiboen zenbat hiruko ordenatu daude (a,b,c), unitatea ez direnak, halakoak non $abc=7^{39}$ baita?

2. problema, 2004ko fase lokalekoa (ostiralekoa).
Damen jokoko taula batean (8x8) 24 fitxa jarriko ditugu, goiko 3 ilarak betetzeko moduan. Fitxen posizioa aldatzeko irizpide honi jarraituko diogu: fitxetako batek beste baten gainetik hutsarte batera egin dezake salto horizontalean (ezkerrera edo eskuinera), bertikalean (gorantz edo beherantz) edo diagonalean. Fitxa guztiak beheko 3 ilaretan jartzeko modua edukiko al dugu?

3. problema, 2004ko fase lokalekoa (ostiralekoa).
Izanen dugu modua planoan 2.003 segmentu trazatzeko, segmentu bakoitzak zehazki beste hiru motz ditzan?

1. problema, 2007ko fase lokalekoa (ostiralekoa).
Poliedro ganbil baten aurpegiak 12 karratu, 8 hexagono erregular eta 6 oktogono erregular dira. Poliedroaren erpin bakoitzean bat egiten dute karratu batek, hexagono batek eta oktogono batek zehazki. Poliedroaren erpin pareak elkartzen dituzten segmentuetan zenbat dira poliedroaren barnekoak, hau da, zenbat dira ertz ez direnak eta aurpegi baten barnean ez daudenak?

1. problema, 2007ko fase lokalekoa (larunbatekoa).
Planokide ez diren lau puntutarako plano ekualizadore bat hau da: puntu horietako bakoitzetik plano horretara distantziak berdinak dituen planoa. Lau puntu ez planokide dauzkan multzo bat daukagula, zenbat plano ekualizadore daude?

3. problema, 2008ko fase lokalekoa (3. taldekoa).
17 zenbaki positibo oso dauzkagu, halakoak non ezeinek ez duen 7tik gorako faktore lehen bat. Demostra ezazu zenbaki horietako bikote bat gutxienez egonen dela, zeinaren biderkadura berbidura perfektu bat baita.

5. problema, 2008ko fase lokalekoa (3. taldekoa).
Klub batek 25 kide dauzka. Bere batzorde bakoitza 5 kidek osatzen dute. Bi batzorde zeinahi hartu, eta gehienez kide komun bat dute. Froga ezazu 30tik gorakoa ez daitekeela izan batzordeen kopurua.

I.5. KONBINATORIAKO PROBLEMAK - ERDIKO MAILA

5. problema, 1994ko fase nazionalekoa.
Damen jokoko 21 fitxa dauzkagula, zuriak batzuk eta beltzak besteak, 3×7 den laukizuzen bat egin dugu. Demostra ezazu beti egoten direla kolore bereko lau fitxa laukizuzen baten erpinetan.

6. problema, 1994ko fase nazionalekoa.
n alde dauzkan poligono ganbil bat deskonposatu, eta m triangelu atera zaizkigu, zeinak disjuntu baitituzte barnealdeak, halako moduan non m triangelu horietako alde bakoitza alboko triangeluarena edo poligonoarena ere baita. Demostra ezazu $m+n$ bakoitia dela. Eta n eta m ezagutzen ditugula, aurkitu zenbat alde ezberdin gelditzen diren poligonoaren barnealdean eta zenbat erpin ezberdin gelditzen diren barnealde horretan.

3. problema, 2003ko fase lokalekoa (ostiralekoa).
Zenbat erpin ezberdin dauzkagu gehienez aukeran hautatzeko 21 alde dituen poligono erregular batean, erpinak elkartzen dituzten segmentuak trazatzean luzera bereko bi ez egoteko?

6. problema, 2003ko fase nazionalekoa.
$2n$ bola zuri eta $2n$ bola beltz hariztatu ditugu, eta kate ireki bat egin dugu. Demostratu honako hau: berdin da zein ordenatan hariztatzen diren, beti izaten da posible katearen segmentu bat moztu, eta horretan zehazki n bola zuri eta n bola beltz izatea.

6. problema, 2004ko fase nazionalekoa.
Alde batetik zuri eta bestetik beltz diren bi koloretako 2.004 fitxa jarri ditugu zirkunferentzia bat eratzen. Mugimendua hau da: alde beltza gora begira duen fitxa bat aukeratu behar dugu, eta hiru fitxari buelta eman: aukeratuari, bere eskuinekoari eta bere ezkerrekoari. Eman dezagun alde beltza gora begira duen fitxa bakar bat dugula hasieran. Posible izanen da, deskribatu dugun mugimendua errepikatuz, fitxa guztiek gora begira izan dezaten alde zuria? Eta 2.003 fitxa baldin baditugu, eta haien artean zehazki batek baldin badu gora begira alde beltza?

5. problema, 2005eko fase lokalekoa (ostiralekoa).
Lau bola beltz eta bost bola zuri modu arbitrarioan jarri ditugu zirkunferentzia baten inguruan. Bi bola kontsekutibo kolore berekoak badira, beste bola beltz bat tartekatzen dugu bien artean. Bestela, bola zuri bat tartekazen dugu. Horiek tartekatu aurretik zeuden bola beltzak eta zuriak kentzen ditugu. Prozesua errepikatuz, posible al da bederatzi bola zuri izatea?

6. problema, 2005eko fase lokalekoa (larunbatekoa).
10x10 den xake taula batean 41 dorre daude. Frogatu haietako 5 gutxienez aukera ditzakegula baina elkar jaten ez dutela.

1. problema (zertxobait aldatua), 2006ko fase lokalekoa (2. taldekoa).
Gazteluaren sotoan 7 gnomo daude altxorra gordetzen. Altxor horrek 12 ate ditu atzean, eta ate bakoitzak 12 sarraila dauzka. Sarraila guztiak dira ezberdinak. Gnomo bakoitzak sarraila batzuetarako bakarrik dauzka giltzak. Hiru gnomo edozein dira sarraila guztietarako giltzak dauzkatenak. Froga ezazu gnomo guztiek denen artean 720 giltz dauzkatela gutxienez.

3. problema, 2008ko fase nazionalekoa.
Izan bedi $p \geq 3$ zenbaki lehena. Triangelu baten alde bakoitza p parte berdinetan banatu dugu, eta banaketaren puntuetako bakoitza aurkako erpinarekin elkartu dugu. Kalkulatu gehienez zenbat eskualdetan, binaka disjuntutan, banatuko dugun horrela triangelua.

6. problema, 2008ko fase nazionalekoa.
Planoko puntu bakoitzari kolore bakar bat esleitu zaio, zazpi kolore ezberdinen artetik. Egonen al da zirkunferentzia batean inskribatzeko moduko trapezio bat, zeinaren erpin guztiak kolore berekoak baitira?