ÍNDICE

PRÓLOGO

La civilización es el modo de vida resultante
de combinar conocimiento y previsión
Bertrand Russell

En el verano de 1974, tras diez años centrado en el estudio de las distancias generalizadas, entré en contacto con los conjuntos borrosos (*fuzzy sets*, en inglés), introducidos por Lotfi A. Zadeh en 1965. Cuando se sufría la fuerte «conjuntivitis» del movimiento pedagógico llamado de la matemática moderna, el artículo de Zadeh no iba exactamente de conjuntos ni de probabilidades, que parecían servir para todo lo cierto y lo incierto; trataba, en realidad, del lenguaje natural y, más concretamente, de sus múltiples términos lingüísticos imprecisos e, incluso, abría una ventana a un tipo de presentación distinta a la típicamente matemática. El artículo de Zadeh iniciaba un estudio «more geometrico» de clases de objetos sin bordes nítidos y para las cuales, además, ni la ley aditiva, ni los principios aristotélicos de no-contradicción y tercero excluido valen como y en la misma forma que en el caso de longitudes, áreas, volúmenes, sucesos aleatorios, conjuntos, etc. Se iniciaba, con la ayuda del análisis matemático y como tiempo antes había pedido John von Neumann, un camino para estudiar el nuevo mundo de lo incierto no aleatorio y de lo impreciso; de aquello que no es sólo «sí» o «no». Fue algo que me cautivó y que me ha llevado a darle vueltas en los últimos cuarenta años.

Las ideas de Zadeh me sonaron, de buen comienzo y de lejos, a otras que había leído en un trabajo de Karl Menger sobre los que él llamó «conjuntos nebulosos», en uno de Jan Lukasiewicz acerca de la lógica polivalente, en un libro de Paulette Destouches-Février acerca de la estructura de las teorías físicas y en otro de Georges Bodiou sobre el cálculo cuántico desde un punto de vista dialéctico. De todo ello pueden encontrarse restos, digamos ideológicos, en lo que ha sido mi trabajo en el campo borroso.

Básicamente, el artículo de Zadeh presentaba una manera de representar matemáticamente los predicados imprecisos, que habían sido dejados de lado por los lógicos desde, por lo menos, Gottlob Frege a finales del siglo XIX. Unos predicados muy abundantes en el lenguaje natural, en buena medida por resumir mucha información dejando de lado detalles innecesarios en algunos contextos; con Zadeh el fenómeno de la imprecisión lingüística ascendió a la primera página de la ciencia y, pronto, muchos investigadores nos sentimos atraídos por sus nuevas ideas y desde intereses distintos. En mi caso, por ejemplo, un impulso para ello fue la rigidez del «bourbakismo» entonces imperante en la enseñanza de las matemáticas que, a mi modo de ver, iba alejando a los matemáticos del mundo real. Siempre he creído que es, por lo menos didácticamente, contraproducente separar la enseñanza de las matemáticas de aquellos aspectos de la realidad en los cuales y gracias a ellas ha avanzado el conocimiento.

En este librito, que no es de «lógica» sino que presenta una nueva forma de acercarse teóricamente al razonamiento ordinario, el de cada día, se intenta simplificar cuanto es posible para que esté al alcance de un público culto, no especializado aunque sin temor a los formulismos matemáticos. Es que, a riesgo de trivializar y limitar la comprensión, no es posible eliminar por completo todos unos formulismos sin los cuales no habría manera de captar cuanto se refiere a magnitudes. Ello requiere a los lectores un esfuerzo adicional que, no obstante, les permitirá contemplar el razonamiento desde un punto de vista distinto y que permite atisbar lo que puede llegar a ser una nueva ciencia del lenguaje y el razonamiento. Una nueva ciencia en la cual el razonamiento creativo conducente a obtener «lo nuevo» tenga el lugar que tradicionalmente no ha tenido.

No se trata aquí cuanto he publicado en los últimos cuarenta años sino que, simplemente, se presenta aquello que para un lector culto puede tener, potencialmente, un mayor interés general. No es sólo el caso de matemáticos, científicos de la computación e ingenieros, sino también de juristas, filósofos, lingüistas, médicos, economistas y pedagogos, todos ellos involucrados necesariamente y en formas diversas con el razonamiento ordinario de las personas; para seguir la exposición, se pide el esfuerzo antes citado. Un esfuerzo que puede conducirles a ver que, aunque lentamente, el estudio del lenguaje y el razonamiento naturales va transformándose de uno de tipo filosófico y lógico, a uno más propio de las ciencias naturales ya que, al fin, se trata de fenómenos naturales de origen físico.

Valga, para animar tal esfuerzo, recordar lo que el Nobel de física, Eugene Wigner, llamó «la irrazonable eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales» que, aún brevemente, obliga a una reflexión acerca de los modelos matemáticos. Aquellos con los que se empezó a desgajar la ciencia de la filosofía y que, gracias al uso sistemático de las medidas numéricas, no sólo liberaron el conocimiento de dogmatismos incomprobables, sino que pasó a ser de utilidad inmediata al permitir la aparición de la moderna tecnología, donde los modelos matemáticos tienen un relevante papel; es con ellos que cabe emplear el tipo de razonamiento más seguro, el razonamiento deductivo formal.

Un modelo no refleja toda la realidad, es una simplificación de la misma que, no obstante, al tener en cuenta sus principales y más significativos aspectos, permite orientar el pensamiento y predecir cuánto de relevante pueda darse en ella; es el caso del mapa de un territorio que, sin contener cuanto hay en el mismo, permite conocer dónde está cualquiera de sus lugares y llegar al mismo. Desde otro punto de vista, también cabe comparar un modelo con la maqueta que se construye antes de empezar a edificar; la maqueta permite imaginar la obra final e introducir correcciones previas. Los modelos matemáticos son modelos abstractos que atienden a la estructura relacional generada con las variables fundamentales involucradas y que permiten, no sólo razonar en forma deductiva, sino hacer cálculos. Si estos cálculos arrojan valores finales de acuerdo con los que aquellas presentan en la realidad, frecuentemente observada mediante experimentos controlados, se tiene un buen motivo para aceptar el modelo en tanto los valores obtenidos no discrepen excesivamente de los que muestre la realidad. En todo caso, nunca hay que confundir el modelo con la realidad, ni aplicar una fórmula surgida en el modelo sin estar seguros de que se satisfacen todos los requerimientos que, en el modelo, permiten su validez. Por citar un ejemplo elemental, como sea que el teorema de Pitágoras es un modelo de los triángulos rectángulos en el plano euclidiano, tal teorema no debe (¡no puede!) aplicarse a los triángulos esféricos.

En lo que sigue, se consideran, desde un nuevo punto de vista, conceptos que en sí mismos no son estrictamente nuevos; algunos de ellos, y hasta cierto punto, son viejos conocidos. No obstante y como sea que tal punto de vista está influido por los modelos y aplicaciones de la «lógica borrosa» que, por sí mismos, facilitan un nuevo instrumento para replantear la reflexión, también aparecen nuevos conceptos que, a su vez, deben ser explicados. Por citar un sólo caso, es el de la vía abierta para representar la incertidumbre de tipo no aleatorio; un tipo de incertidumbre acerca de sucesos ni repetibles, ni representables por conjuntos nítidos, que aparece en el lenguaje ordinario y que en absoluto es obvio que siempre quepa tratar con métodos probabilísticos.

Si, en palabras de Albert Einstein, «el análisis químico de la sopa, no sabe a sopa», este libro pretende ayudar a encontrarle sabor al estudio «more geométrico» del razonamiento común que el autor ha podido abordar gracias a sus trabajos anteriores en la teoría de los conjuntos borrosos. Introducida a partir de 1965 por el profesor Lotfi A. Zadeh de la Universidad de California en Berkeley y de la que, ya muy mayor, es profesor emérito, esa teoría representa un giro respecto de las concepciones clásicas, insuficientes para el estudio del lenguaje y el razonamiento.

Pocas veces, en la historia de la ciencia, el introductor de una teoría ha sido testigo del éxito tecnológico de la misma. En el caso de Zadeh, no sólo ha sucedido así, sino que, ingeniero al fin, ha contribuido a tal éxito con la introducción a fines de los años 1980 del nuevo campo del *Soft Computing*, un nombre que podría traducirse al castellano por Computación Flexible, y, luego, a finales de los 1990, con el nuevo concepto de la computación con palabras (*Computing with Words*, en inglés). El *Soft Computing* es una hibridación de diversas metodologías que, apoyadas en la lógica borrosa, permite resolver problemas tecnológicos anteriormente difíciles de plantear por la presencia en ellos sea de imprecisión, sea de incertidumbre tanto aleatoria, como, especialmente, no aleatoria.

Oviedo y Mieres (Asturias), Enric Trillas
marzo, 2015

INTRODUCCIÓN

I. En el mundo de la investigación, casi nunca cabe conocer «todo» sobre «algo» por mucho que ese algo sea importante. Tampoco cabe desmenuzar siempre los razonamientos habituales en partes elementales o atómicas perfecta y totalmente conocidas y, por tanto, muy raramente, si alguna vez, tales razonamientos pueden ser del tipo deductivo de la prueba matemática; más difícilmente parecen poder serlo aquellos procesos de razonamiento que permiten llegar a nuevas ideas, al famoso *Eureka!*, los razonamientos creativos. De ahí, en parte, que las aproximaciones al razonamiento ordinario a través de la lógica matemática se queden, a la vez, cortas y largas; cortas por considerar esencialmente al razonamiento como deducción y largas por sus propios intereses de tipo teórico siempre un tanto alejados de un fenómeno natural como es el razonamiento común que las personas efectúan mayormente en un lenguaje natural y no en uno artificial y formal. Muchas veces, el razonamiento trata de ir más lejos de lo ya sabido y recogido en sus premisas.

Además, el conocimiento previo del que se dispone casi nunca es ni presumiblemente fiable, ni compactable en unos pocos «axiomas» indiscutibles. Para abrir paso al conocimiento hay que razonar de forma más débil que la deducción formal, con «saltos» no siempre desmenuzables por completo en pasos mínimos y, usualmente, nueva información obliga a revisar lo que se concluyó anteriormente; el aumento de la información o evidencia previa lleva, frecuentemente, a revisar conclusiones anteriores. Mucho del conocimiento del mundo es esencialmente revisable y con fecha, aunque desconocida, de caducidad; se trata de conocimiento conjetural al cual, algunas veces, se llega a través de metáforas y por caminos argumentativos difíciles de encadenar en pasos mínimos como es típico de las pruebas formales.

Este librito intenta estudiar el razonamiento común, ordinario, de cada día o de sentido común, sus tipos y algunos de los problemas involucrados en el mismo. Para ello se parte de que todo razonamiento conduce, de una información previa sobre algo, compactada en un número finito de enunciados o premisas, a otros enunciados llamados sus conclusiones. Para comprender y ser comprendido es básico capturar el significado de las frases empleadas y, por ello, se presta atención a la representación del significado de aquellos predicados que son medibles, es decir, representables por magnitudes numéricas, dejando de lado a los que no son medibles, los que cabe llamar metafísicos y sin que ello signifique que se les desprecie ya que, de tener carácter metafórico, pueden ayudar a plantear nuevos problemas. Se trata de una presentación del «problema del significado» que se limita a considerar aquellos significados que pueden medirse y que, por ello, lleva a verlos desde el punto de vista de cómo las correspondientes palabras actúan en el universo en el cual se emplean; puede decirse que se basa en cambiar significado por uso o comportamiento, lo que permite, además, distinguir el significado lingüístico primario de su más amplio y, a la vez restrictivo, significado de trabajo. Algo que, en realidad, cabe retrotraer hasta el

Ludwig Wittgenstein de las «Investigaciones filosóficas» y que, metafóricamente, podría resumirse en el dicho «sólo se come lo que pesa». Se intenta ofrecer un modelo, tal vez primerizo, del razonamiento común y no necesariamente deductivo.

II. Designaremos por $p_1, p_2, ..., p_n$ a las premisas, por P a su conjunto y por la letra q afectada, cuando convenga, de subíndices, a las conclusiones; es decir,

$$P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$$

será el conjunto de las n premisas de partida y

$$C(P) = \{q; \text{ q es una conclusión de P}\}$$

el de las conclusiones de llegada, el cual puede no ser finito y que, para poder saber del mismo, debe especificarse qué se entiende por «una conclusión de P».

Un proceso de razonamiento es cualquier procedimiento que permita asegurar que q está en el conjunto C(P), o sea que es $q \in C(P)$, con el uso ordinario del símbolo $\in$, que se lee «pertenece a». Conviene precisar que el término «procedimiento» es uno que, en algunos pero no en todos los casos, puede ser sistemático, algorítmico, pero en otros consistir en la comparación, a veces analógica, con algo anteriormente estudiado, es decir, procesos de razonamiento basados en casos.

En cuanto al problema del significado de los predicados, se plantea a través de magnitudes numéricas que se aplican especialmente al abundante caso de los razonamientos involucrando predicados imprecisos. Se analiza también lo que se refiere a lo que sea razonar por analogía o semejanza, así como dos temas de importancia capital, el de los principios básicos de no-contradicción y tercero excluido, y el de la incertidumbre que no es de carácter aleatorio. Finalmente, se presentan dos reformulaciones de esos principios aristotélicos con las cuales ambos resultan universalmente válidos con los conjuntos borrosos, a la vez que se revisan los conceptos de «verdadero» y de «incierto».

Cuanto se expone intenta seguir la vieja regla metodológica o «navaja» de Guillermo de Occam (siglo XIV),

> No plantear un problema con más términos de los estrictamente necesarios,

complementada con la moderna adenda de Karl Menger (siglo XX),

> ni con menos de los necesarios para obtener soluciones fértiles al problema en cuestión,

que obligan a un continuo equilibrio metodológico entre lo indispensable y lo superfluo.

Es pertinente avisar que las exposiciones que seguirán no lo son al estilo axiomático típico de la lógica matemática; casi siempre se parte de conceptos que están en el lenguaje y el razonamiento ordinarios y, tomándolos como sólo «describibles» pero no necesariamente «definibles», se procede con desarrollos *naïve*, ingenuos, a representaciones de tipo matemático (modelos) como suele hacerse en las ciencias naturales. Los modelos que se presentan no cuestionan en absoluto las matemáticas, construidas sobre el concepto clásico de conjunto; se limitan a dar una interpretación matemática convencional de algunos conceptos del lenguaje natural que son básicos para comprender lo que la llamada lógica borrosa pretende como una nueva «ciencia de la imprecisión y la incerteza de tipo no aleatorio».

III. Los siguientes temas constituyen el armazón que subyace a cuanto sigue.

• Los procesos de razonamiento, terminando en conclusiones que no son sino conjeturas y refutaciones, de los cuales la obtención de consecuencias (procesos de deducción), de hipótesis (procesos de abducción) y de especulaciones (procesos de especular) son casos particulares. Hay conjeturas, las creativas y algunas hipótesis, que no pueden alcanzarse deductivamente; son las propiamente inductivas, las que permiten llegar «más allá», llegar a ideas nuevas no incluidas en las premisas; son la base de la creatividad. Conviene, además, distinguir entre los procesos de deducción informal u ordinaria del razonamiento común, y los formales como una prueba matemática; en los primeros puede haber saltos entre pasos intermedios que, eventualmente, pueden invalidar la consecuencia final, pero en los segundos esos saltos no están autorizados. El razonamiento aparece así, *à la* Popper, como conjeturar + refutar y, por vez primera, se presenta a través de un modelo matemático global en el que tiene su sitio la creatividad a través, en particular, de las conjeturas llamadas, precisamente, especulaciones creativas que, no alcanzables deductivamente tienen un importante papel tanto en la búsqueda de explicaciones, como de ideas de nuevo cuño.

• El significado de las palabras y, concretamente, de aquellos predicados imprecisos que son medibles, llegándose así al concepto de conjunto borroso y a las propiedades útiles para controlar, computacionalmente, sistemas dinámicos (máquinas, por ejemplo) de comportamiento describible por un sistema de reglas lingüísticas aportadas por un experto en el manejo del sistema. Muchas veces el conocimiento se expresa por medio de sistemas de reglas, esto es, conjuntos de expresiones lingüísticas condicionales; mucho conocimiento, especialmente práctico, es conocimiento reglado. Un conocimiento que puede aplicarse.

Es relevante la distinción entre imprecisión e incerteza, dos conceptos que no deben confundirse. Como lo es la distinción entre incerteza repetitiva o aleatoria e incerteza singular o no repetitiva; si la primera puede estudiarse con las medidas de probabilidad, la segunda requiere nuevas medidas entre las cuales las de posibilidad están entre las más conocidas. De hecho, casi todos los conjuntos borrosos no son sino distribuciones de posibilidad.

Es el carácter medible de los predicados (nombres de propiedades) el que permite distinguir entre lo que cabe estudiar en modo científico, y lo que aún resta confinado en el campo de lo metafísico; entre lo que puede contrastarse nítidamente con la realidad y aquello que bien no admite tal posibilidad, o bien no la admite todavía. Es la manera como la ciencia logra domesticar conceptos previamente adquiridos empíricamente y, a la vez, disminuir la ignorancia a través de la confrontación con la realidad observable. De hecho, una creencia compartida por los científicos es que la realidad es medible; es la que les ha llevado a la convicción de que el mundo es comprensible sin tener que recurrir a misterios o mitos.

- La importancia de la analogía o semejanza en el razonamiento, haciendo notar su carácter instrumental al no facilitar más que conjeturas y refutaciones. Se introduce la idea e importancia del control semántico para que, algún día, los ordenadores pasen de meros instrumentos sintácticos a instrumentos semánticos, que reconozcan significados contextuales de frases largas y complejas. Como, un caso particular del concepto de vaguedad, se analiza brevemente